Relació entre espècies (models continus)

Models continus

Els models continus són:
Competència de Lotka-Volterra

$$\frac{dx}{dt} = r_x(1 - x - ay)x$$

$$\frac{dy}{dt} = r_y(1 - y - bx)y$$

Presa-depredador de Volterra

$$\frac{dx}{dt} = r_x(1 - x)x - axy$$

$$\frac{dy}{dt} = abxy - dy$$

Recordem que la versió discreta d'aquests models era

$$x_{i+1} = R_x(1 - x_i - \alpha y_i)x_i$$
$$y_{i+1} = R_y(1 - y_i - \beta x_i)y_i$$

$$x_{i+1} = R_x(1 - x_i)x_i - \alpha x_i y_i$$
$$y_{i+1} = \alpha\beta x_i y_i + (1 - \delta)y_i$$

Equivalència amb els models discrets

No són ben bé equivalents als discrets. No obstant, les següents relacions poden, en certs casos, fer que ho siguin

1. r és la taxa de creixement, que està relacionada amb el factor de creixement

$$r_i = \frac{\ln(R_i)}{\Delta t}$$

2. La normalització K és la capacitat del sistema, relacionada amb Q per

$$Q_i = K_i\left(1 + \frac{1}{r_i\Delta t}\right) \simeq K_i\left(1 + \frac{1}{R_i - 1}\right)$$

En el cas presa-depredador, els depredadors utilitzen la mateixa normalització que les preses.

3. Paràmetres

   (a) Competència

$$a = \frac{Q_x}{K_x}\frac{K_y}{Q_y}\alpha$$

$$b = \frac{Q_y}{K_y}\frac{K_x}{Q_x}\beta$$

   (b) Presa–Depredador

$$a = \frac{K_x}{Q_x}\frac{1}{\Delta t}\alpha$$

$$b = \beta$$

$$d = \frac{\delta}{\Delta t}$$

Equacions diferencials

Dividim el temps en intervals. Les equacions de recurrència ens permeten calcular la població en els instants que separen els intervals.

$$\frac{dx}{dt} = f(\mu, x)$$

Els següents conceptes són importants:

1. Punts fixos: són els punts en els quals el sistema pot continuar indefinidament.

$$f(\mu, x^*) = 0$$

2. Estabilitat: Els punts fixos poden ser estables ($|\lambda| < 1$) o inestables ($|\lambda| > 1$).

$$\lambda = \frac{\partial f(\mu, x^*)}{\partial x}$$

3. Bifurcacions: Un petit canvi en el paràmetre μ pot canviar completament els punts fixos del sistema.

4. Òrbites: Encara que no hi hagi un punt fix el sistema pot anar recorrent una sèrie de valors una i altra vegada.

5. Atractor: Aparició del caos. No existeix òrbita però la trajectoria del sistema està restringida a una regió.

Estabilitat en sistemes

Tot el que s'ha dit, també és aplicable a sistemes d'equacions diferencials

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\mu, \vec{x})$$

Els punts fixos es troben mitjançant un sistema d'equacions algebraiques

$$f_i(\mu, \vec{x^*})$$

Per discutir l'estabilitat del sistema ens cal trobar els valors propis λ_i de la matriu jacobiana, avaluada en el punt fix

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i(\mu, \vec{x^*})}{\partial x_j}$$

Cal que tots els λ_i siguin negatius per a que el punt fix sigui estable. Els valors propis es troben a partir de l'equació característica

$$|J - \lambda I| = 0$$

Resultats

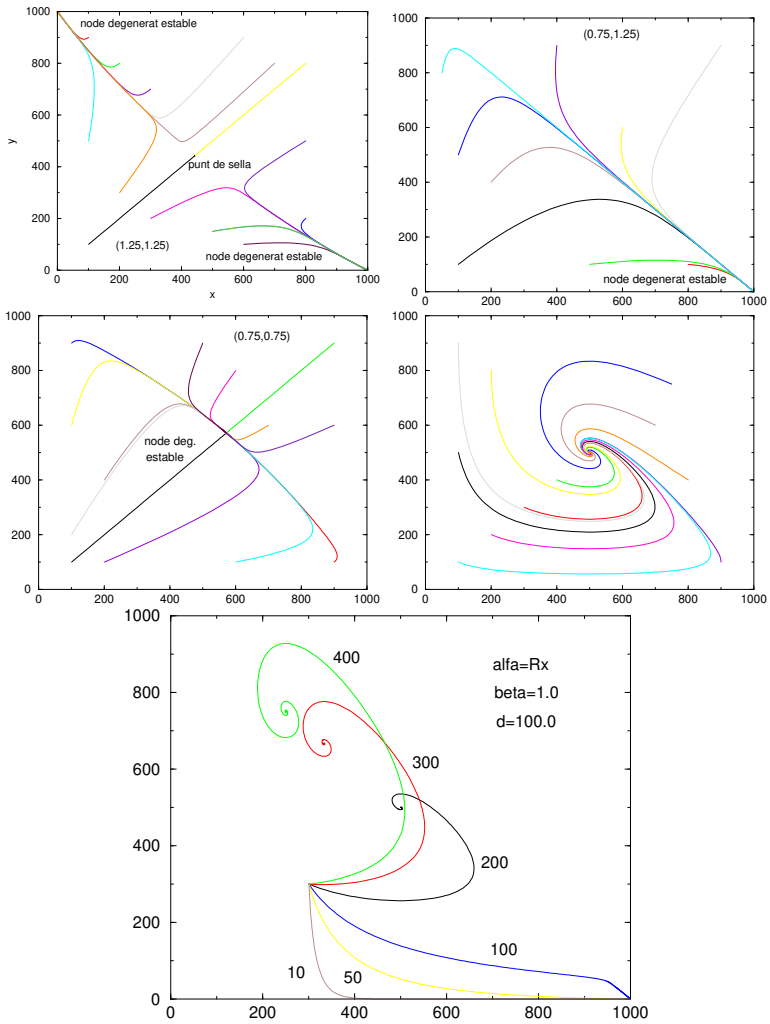

Figure 1: Evolució en funció del temps