

PREGUNTA

Més dubtes:

Quan vas posar l'exemple del camp elèctric en un pla infinit carregat elèctricament mitjançant la llei de Gauss vas acabar posant la gràfica (E - z) essent E el camp elèctric que travessa la superfície cilíndrica gaussiana i z la component de l'eix de coordenades que segueix la mateixa direcció que la "h" (l'alçada) del cilindre. Sabent que el camp elèctric és travessat solament per la tapa superior i inferior, vas deduir que el camp elèctric és constant (K) per $x > 0$ i ($-K$) per $x < 0$, tenint una discontinuïtat del tipus evitable en $x=0$. La pregunta referent a l'explicació anterior; com és que no es té en compte l'alçada del cilindre? no entenc perquè és constant, ja que si jo allunyo tant per sota com per sobre les tapes del cilindre (augmento la "h" del cilindre) el camp anirà disminuint no? Sé a la vegada, que per calcular matemàticament aquest camp, és el suma de les tres integrals i en la integral que dona 0 és la conté l'alçada h (és la integral que té com a superfície: $2\pi r \pi h$). Com s'explica teòricament que és constant malgrat allunyar les tapes?

RESPOSTA

Matemàticament es pot entendre que el camp elèctric és independent de la distància del punt P (punt camp) si es mira el resultat del punt 1.5.2.5: Camp elèctric a un punt de l'eix d'un disc que és perpendicular al disc i que passa pel seu centre. Quan la distància entre el centre del disc i el punt camp P és finita, el resultat és:

$$E_x = 2\pi\sigma K_e \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right) \quad (1)$$

Per tant, quan el disc és finit, el camp SÍ depèn de la distància entre el centre del disc i el punt camp P.

Si ara ens interessa calcular el camp quan el disc és infinit (pla infinit), haurem de prendre el límit quan x/R tendeix cap a zero. Això ens indica que o bé x és molt petit (som prop del pla) o bé R és molt gran (disc infinit). O bé ambdues coses a l'hora. Si ens fixem al darrer terme del parèntesis:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{x}{R\sqrt{1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2}} = \frac{x}{R} \left[1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2\right]^{-1/2} \approx \frac{x}{R} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R}\right)^2\right] \quad (2)$$

On s'ha fet ús de l'aproximació $(1+z)^n \approx 1+n \times z$ sempre que $z \ll 1$ i s'ha pres $z = (x/R)^2$ i $n = -1/2$. Substituint ara al l'equació del camp:

$$E_x = 2\pi\sigma K_e \left(1 - \frac{x}{R} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R}\right)^2\right]\right) = 2\pi\sigma K_e \left(1 - \frac{x}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R}\right)^3\right) \quad (3)$$

Per últim, prenent el límit:

$$\lim_{x/R \rightarrow 0} E_x = 2\pi\sigma K_e = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (4)$$

Et serà útil llegir la lliçó 23 del llibre "Física para la Ciencia y la Tecnología", volum 2, de l'autor Paul. A. Tipler.